

Key words: optimization; management; drying; technology; humidity; drying speeds.

УДК 517.929

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© Ю.Ф. Долгий

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием; устойчивость; квадратичные функционалы.

Для линейных автономных систем с последействием предложен метод вычисления квадратичных функционалов Ляпунова–Красовского. Нахождение их представлений сводится к решению краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d\eta(s)x(t+s),$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x: [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$.

Методы вычисления квадратичных функционалов Ляпунова–Красовского для различных классов линейных автономных систем с последействием предлагались в [1–3]. В данной работе показано, что нахождение представлений квадратичных функционалов Ляпунова–Красовского связано с решением краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Система дифференциальных уравнений с последействием описывается в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ уравнением [4]

$$\frac{dx_t}{dt} = \mathcal{A}x_t,$$

где неограниченный оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathcal{A}x)(\vartheta) = \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta}, \vartheta \in [-r, 0), (\mathcal{A}x)(0) = \int_{-r}^0 d\eta(s)x(s),$$

$$D(\mathcal{A}) = \{x(\cdot) : x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)\}.$$

Задается линейный ограниченный самосопряженный оператор $W: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и рассматривается уравнение Ляпунова

$$U\mathcal{A} + \mathcal{A}^*U + W = 0,$$

решение которого $U: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяет ограниченный квадратичный функционал $u(x(\cdot)) = (Ux(\cdot), x(\cdot))$, $x(\cdot) \in \mathbb{H}$. Уравнение Ляпунова будем решать в случае, когда оператор W допускает следующее представление

$$(Wx(\cdot))(\vartheta) = M(\vartheta, 0)x(0) + \int_{-r}^0 M(\vartheta, s)x(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad x(\cdot) \in \mathbb{H},$$

удовлетворяющее условиям:

- 1) $M^\top(0, 0) = M(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- 2) для почти всех $\vartheta \in [-r, 0)$ полагаем $M^\top(0, \vartheta) = M(\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и отображение $M(\cdot, 0) \in \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$;
- 3) для почти всех точек $(\vartheta, s) \in [-r, 0) \times [-r, 0)$ полагаем $M^\top(s, \vartheta) = M(\vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и отображение $M(\cdot, \cdot) \in \mathbb{L}_2([-r, 0) \times [-r, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$.

Условия 1)–3) обеспечивают принадлежность оператора W классу вполне непрерывных операторов Гильберта–Шмидта. Требуем, чтобы решение U уравнения Ляпунова принадлежало описанному выше классу вполне непрерывных операторов Гильберта–Шмидта.

В данной работе показано, что задача нахождения представления оператора U сводится к решению краевой задаче для матричного функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-r}^{\vartheta} \left(X(\tau) d\eta(\tau - \vartheta) + d\eta^\top(\tau) X^\top(\tau - \vartheta) \right) +$$

$$X(-r)\eta(-r - \vartheta) + \int_{-r}^{\vartheta} M(\tau, \tau - \vartheta) d\tau + M(\vartheta, 0),$$

$$X(0) + X^\top(0) + M(0, 0) = 0,$$

$$X(-r)\eta(-r) = \eta^\top(-r)X^\top(-r).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Infante E.F., Castelan W.B. A Lyapunov functional for a matrix difference-differential equation // J. Different. Equat. 1978. V. 29. № 3. P. 439–451.
2. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. V. 13. № 1. P. 48–88.
3. Мильштейн Г.Н. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 984–993.
4. Кrasовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований «Математическая теория управления» (проект 12-П-1-1019) и гранта РФФИ № 13-01-00094.

Dolgii Y.F. CALCULATION OF QUADRATIC LYAPUNOV-KRASOVSKII FUNCTIONALS FOR LINEAR AUTONOMOUS SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

For linear autonomous systems with aftereffect method for calculating the quadratic Lyapunov-Krasovskii functionals is proposed. Finding their representations reduces to the solution of boundary value problems for functional differential equations.

Key words: differential equations with aftereffect; stability; quadratic functionals.